Dérivation

Dédou

Février 2011

Le type de la dérivation

On dérive une fonction en un point et ça donne un nombre mais ça ne marche pas toujours. La dérivée de f en a est notée $f'(a)$.

Tout ceci est condensé dans

la "carte de visite" de la dérivation

$$\begin{array}{rrcl} Der: & (\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_\perp \\ & (f, a) & \mapsto & f'(a). \end{array}$$

La fonction qu'on dérive n'est pas forcément partout définie, d'où le premier $\perp$, et sa dérivée encore moins, d'où le second.

Dériver une fonction

La dérivation qu'on vient d'évoquer concerne les fonctions. On ne peut pas écrire par exemple :

$$(x^2+1)' = 2x$$

parce que x^2+1 est un nombre, et pas une fonction. Il faut écrire

$$(x \mapsto x^2+1)' = x \mapsto 2x$$

ce qui est un peu énervant. Ou alors, comme on a fait en Terminale, on "pose" $f(x) = x^2+1$ et on constate qu'on a $f'(x) = 2x$ (dans cette présentation, il faut préciser "pour tout réel x", ce qui est aussi un peu énervant).

Exemple

La dérivée de $x \mapsto x^2 + \sin x$ est $x \mapsto 2x + \cos x$.

Exo 1

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x \sin x$.



La notation de Leibniz

On peut aussi dériver un nombre (comme x^2+1), mais alors il faut préciser la variable par rapport à laquelle on dérive (ici x). C'est ce que permet la notation de Leibniz, avec laquelle on peut écrire

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x.$$

Cette notation, qu'affectionnent les physiciens, est dangereuse et nous l'éviterons soigneusement.

Exo 2

Donner la dérivée de $x \mapsto 2x^3$ en utilisant la notation de Liebniz.

Fonctions dérivables

Certaines fonctions sont dérivables et d'autres pas. Par exemple la fonction valeur absolue n'est pas dérivable.
Plus précisément, elle n'est pas dérivable *partout*, mais elle est quand même dérivable sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire partout sauf en 0.
Donc nous dirons/écrirons des phrases de la forme

$$f \text{ est dérivable sur } I$$

avec f fonction et I partie de $\mathbb{R}$ (souvent un intervalle).

La valeur de la dérivée

La dérivée, c'est la pente de la tangente, et la tangente, c'est "la limite des sécantes".
C'est important de comprendre ça pour avoir une bonne intuition de ce qui se passe, mais on n'utilise presque jamais cette définition.
On se débrouille presque toujours avec les formules magiques, parce qu'il y en a une pour chacune de nos recettes de fonctions.

Dériver une somme, en gros

Pour dériver une somme, c'est pas trop compliqué :

La dérivée d'une somme c'est la somme des dérivées.

Et la formule, c'est

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Dériver une somme, en détail

Comme on a un peu de temps, on regarde un peu en détail.
Si f et g sont deux fonctions dérivables, alors $f + g$ est aussi dérivable et sa dérivée est la somme de celle de f et de celle de g.

Plus généralement, si f et g sont deux fonctions dérivables sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors $f + g$ est aussi dérivable sur I et, sur I, sa dérivée est la somme de celle de f et de celle de g.

Dériver une combinaison linéaire

Comme on aime bien l'algèbre, on traîte les combinaisons linéaires :

La dérivée d'une combinaison linéaire
c'est la combinaison linéaire des dérivées.

Et la formule, c'est

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Et dans la version précise, ça donne :

Si f et g sont deux fonctions dérivables, et λ et μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g$ est aussi dérivable et sa dérivée est $\lambda f' + \mu g'$.

Plus généralement, si f et g sont (seulement) dérivables sur une partie I de $\mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ est aussi dérivable sur I et, sur I, sa dérivée est la combinaison linéaire $\lambda f' + \mu g'$.



Linéarité de la dérivation

Linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}$

- Les fonctions sur $\mathbb{R}$ constituent un espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ avec les opérations qu'on sait.
- Les fonctions dérivables constituent un sous-espace vectoriel $D(\mathbb{R})$ de cet espace vectoriel.
- Et la dérivation $D(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est une application linéaire.

Linéarité de la dérivation sur un intervalle

Soit par exemple I un intervalle.

- Les fonctions sur I constituent un espace vectoriel $\mathbb{R}^I$ avec les opérations qu'on sait.
- Les fonctions dérivables constituent un sous-espace vectoriel $D(I)$ de cet espace vectoriel.
- Et la dérivation $D(I) \to \mathbb{R}^I$ est une application linéaire.

Dériver un produit

Pour un produit, c'est pareil, y'a que la formule qui change.

La dérivée d'un produit, ce n'est pas le produit des dérivées.

La formule, c'est

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Dériver un quotient

Pour un quotient, y'a encore que la formule qui change, cette fois c'est

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

En plus, il faut faire attention au domaine de définition qui est donné par la formule

$$DD(\frac{f}{g}) = \{x \in DDf \cap DDg | g(x) \neq 0\}.$$

Dériver une composée, en gros

La composition est l'opération compliquée concernant les fonctions. Quand on écrit $f(g(x))$, ça cache une fonction composée. Comme on ne peut pas dire que cette fonction, c'est $f(g)$, on dit que c'est $f \circ g$. La formule pour la dérivée de $f \circ g$, c'est

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g).$$

Elle est un peu horrible.

Dériver une composée, en détail

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g).$$

Plus encore que celles pour la somme et le produit, cette formule a un mode d'emploi subtil. On va le décliner en deux temps :
- Si g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et la formule s'y applique.
- Si, sur l'intervalle I, g est dérivable et prend ses valeurs dans l'intervalle J, si enfin f est dérivable sur J , alors $f \circ g$ est dérivable sur I, et sa dérivée y est donnée par la formule.

Dériver une composée, les cas qui servent

$$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g).$$

Les cas qui servent sont ceux où f est l'une de nos "cinq" fonctions favorites, ça donne les cinq formules magiques ;

$$(\cos g)' = -g' \sin g$$

$$(\sin g)' = g' \cos g$$

$$(e^g)' = g' e^g$$

$$(\ln g)' = \frac{g'}{g}$$

$$(g^a)' = a g' g^{a-1}.$$

Les formules magiques avec u au lieu de g

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^a)' = a u' u^{a-1}.$$

Attention, il y a u' partout, et on a tendance à l'oublier un peu trop souvent.

Exemple

Exemple

La fonction $f := x \mapsto \sin(e^x + 1)$ est de la forme $\sin u$ avec $u := x \mapsto e^x + 1$. On a donc $u' = x \mapsto e^x$ et $f' = x \mapsto e^x \cos(e^x + 1)$.

Exo 3

Calculer la dérivée de $x \mapsto e^{\sin x + 1}$.